SUBIECTUL I

Varianta 1

1. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.

2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+4) = 2$.

3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0$.

4. Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

5. Fie punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$ şi $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

Soluţii

1. Avem $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \Rightarrow C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$, iar $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, deci $C_3^2 + 3! = 3 + 6 = 9$.

2. Se impune condiţia $3x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Avem $\log_5(3x+4) = 2 \Leftrightarrow 3x + 4 = 5^2 = 25 \Leftrightarrow x = 7 \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

3. Avem $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1$ şi $P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = -2$, deci $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

4. Funcţia f este continuă şi strict descrescătoare, $f(0) = 0$, $f(1) = -1 \Rightarrow f([0,1]) = [-1,0]$.

5. Ştiind că punctul $M(x,y)$ are vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, obţinem că $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\vec{i} + 3\vec{j}) - (2\vec{i} - \vec{j}) = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

6. Aplicăm teorema cosinusului:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4^2 + \sqrt{3}^2 - \sqrt{7}^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci } B = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Varianta 2

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$.

2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $x^2 - 5x + 5 \le 1$.

4. Să se demonstreze că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numerele $3^x - 1$, 3^{x+1} şi $5 \cdot 3^x + 1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ şi $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{OA} + \vec{OB}$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC = 2$, $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$ şi $AB = 4$.

Soluţii

1. Avem $f(3) = 3 - 3 = 0$ şi cum $f(3)$ apare ca factor în produs, deducem că produsul este nul.

2. Se impun condiţiile $x + 2 > 0$ şi $x > 0$, deci $x \in (0, \infty)$.

$\log_2(x+2) + \log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x(x+2) = 3 = \log_2 8 \Leftrightarrow x(x+2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$, cu soluţiile $x_1 = -4 \notin (0,\infty)$ şi $x_2 = 2 \in (0,\infty) \Rightarrow x = 2$.

3. $x^2 - 5x + 5 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow x \in [1,4]$.

Avem $[1,4] \cap \mathbb{Z} = \{1,2,3,4\}$.

4. Observăm că $(3^x - 1) + (5 \cdot 3^x + 1) = 6 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1}$, deci avem $\div\ 3^x - 1,\ 3^{x+1},\ 5 \cdot 3^x + 1$.

5. Avem $\overline{OA} = 4\bar{i} - 8\bar{j}$ şi $\overline{OB} = 6\bar{i} + 3\bar{j}$, deci $\overline{OA} + \overline{OB} = 10\bar{i} - 5\bar{j}$, deci vectorul $\overline{OA} + \overline{OB}$ are coordonatele $(10,-5)$.

6. $S[ABC] = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)}{2} = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2$.

Varianta 3

1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, …

2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x} = x$.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB = AC = \sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

Soluţii

1. Termenii şirului sunt într-o progresie aritmetică $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de raţie $r = 6 = 7 - 1$ şi termen iniţial $x_1 = 1$, deci $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

În particular, $x_{10} = 6 \cdot 10 - 5 = 55$.

2. Fie $A=\{\overline{xyz} \mid x,y,z\in\{1,2\}\}$. Avem: $|A|=|\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\{1,2\}\}|=$ $=|\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{1,2\}|=|\{1,2\}|^3=2^3=8$. Suma cifrelor numărului $\overline{xyz}$ verifică relaţiile $x+y+z\geq 1+1+1=3$ şi $x+y+z\leq 2+2+2=6$. În mulţimea $\{3,4,5,6\}$ singurele numere divizibile cu 3 sunt 3 şi 6, obţinute ca sume ale cifrelor numerelor 111, respectiv 222, de unde deducem că singurele numere divizibile cu 3 din A sunt 111 şi 222, deci $p=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

3. Avem condiţiile $2+x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$ şi $x\geq 0$, deci $x\in[0,+\infty)$.

Atunci $\sqrt{2+x}=x \Rightarrow \left(\sqrt{2+x}\right)^2=x^2 \Rightarrow 2+x=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$. Avem $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm 3}{2}$, $x_1=\frac{1-3}{2}=-1\notin[0,\infty)$, $x_2=\frac{1+3}{2}=2\in[0,\infty)$, deci $x=2$ este singura soluţie a ecuaţiei.

4. $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=2\cdot(-2)+1+2\cdot(-1)+1+2\cdot 0+1+2\cdot 1+1=$ $=2\cdot(-2-1+0+1)+4=-4+4=0$.

5. $(AB): \frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-(-1)}{-2-(-1)}=\frac{x-2}{1-2} \Leftrightarrow \frac{y+1}{-1}=\frac{x-2}{-1} \Leftrightarrow x-y-3=0$.

6. $S[ABC]=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle A)}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ}{2}=\frac{1}{2}$.

Varianta 4

1. Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $(x-1)^2+x-7<0$.

2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=1$ şi $a_2=3$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m ştiind că valoarea maximă a funcţiei f este egală cu 5.

4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$.

5. Să se determine numărul real a ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=3$ şi $m(\hat{C})=30^\circ$.

Soluţii

1. $(x-1)^2+x-7<0 \Leftrightarrow x^2-x-6<0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)<0 \Leftrightarrow x\in(-2,3)$.

Avem $(-2,3)\cap\mathbb{Z}=\{-1,0,1,2\}$.

2. $r = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, în particular $a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. Atunci $S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(1+9) \cdot 5}{2} = 25$.

3. Avem $a = m$, $b = -8$, $c = -3$, $\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 12m$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{64+12m}{4m} = -\frac{16+3m}{m}$. O funcţie de gradul al II-lea $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite punct de maxim dacă şi numai dacă $a < 0$ şi atunci $\max_{x \in R} f(x) = y_V$, deci $m < 0$ şi $y_V = -\frac{3m+16}{m} = 5 \Rightarrow m = -2$.

4. Se impun condiţiile $x + 2 > 0$ şi $x - 5 > 0$, deci $x \in (5, \infty)$.

Avem $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+2}{x-5} = \log_2 8 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-5} = 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 2 = 8(x-5) \Leftrightarrow x = 6 \in (5, \infty)$.

5. $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $a - 2 \neq 0$ şi $\frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \Leftrightarrow 2(a-2) = 3a \Rightarrow a = -4$.

6. Conform teoremei sinusurilor, avem $AB = 2R \sin \hat{C} \Leftrightarrow 3 = 2R \sin 30° \Rightarrow R = 3$.

Varianta 5

1. Să se determine numărul elementelor mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 2\}$.

2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots, \sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr raţional.

3. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Să se determine soluţia reală a ecuaţiei $2f(x) + 3g(x) = -5$.

4. După o reducere cu 20%, preţul unui produs este de 320 de lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

5. În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC şi D mijlocul ipotenuzei BC. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că $AC = 6$ şi $AD = 5$.

Soluţii

1. Avem $|x+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$, deci $A = [-3,1] \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Evident $|A| = 5$.

2. Fie $A = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \cdots, \sqrt[3]{30}\}$. Evident $|A| = 30$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Q}$.

Atunci $\exists\, p,q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$ astfel încât $\sqrt[3]{n}=\frac{p}{q} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{n}\right)^3=\left(\frac{p}{q}\right)^3 \Rightarrow n=\frac{p^3}{q^3} \Rightarrow q^3n=p^3$.

Presupunem prin absurd că avem $q>1 \Rightarrow \exists\, k\in\mathbb{N}^*$ număr prim astfel încât $k/q \Rightarrow k/q^3n \Rightarrow$

$\Rightarrow k/p^3 \Rightarrow k/p$. Din k/p şi $k/q \Rightarrow k/(p,q)=1$, contradicţie. Deci $q=1$, adică $n=\frac{p^3}{q^3}=p^3$.

În concluzie, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, dacă $\sqrt[3]{n}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=p^3$.

Printre numerele 1, 2, … , 30, cuburi perfecte sunt doar trei, anume: $1^3=1$, $2^3=8$ şi $3^3=27$, deci $A\cap\mathbb{Q}=\left\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{8},\sqrt[3]{27}\right\} \Rightarrow |A\cap\mathbb{Q}|=3 \Rightarrow p=\frac{|A\cap\mathbb{Q}|}{|A|}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$.

3. $2f(x)+3g(x)=-5 \Leftrightarrow 2(x+3)+3(2x-1)=-5 \Leftrightarrow x=-1$.

4. Fie x preţul iniţial al produsului. În urma unei reduceri cu 20%, preţul devine $x'=x(1-20\%)=x\left(1-\frac{20}{100}\right)=x\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}x$, deci $\frac{4}{5}x=320 \Rightarrow x=\frac{5}{4}\cdot 320=400$, adică preţul iniţial al produsului a fost de 400 de lei.

5. $5\vec{u}+3\vec{v}=5\cdot\left(-3\vec{i}+2\vec{j}\right)+3\cdot\left(5\vec{i}-\vec{j}\right)=0\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}$, deci coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$ sunt $(0,7)$.

6. Avem că $AD=\frac{BC}{2} \Rightarrow BC=2AD=10$.

Conform teoremei lui Pitagora, $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Varianta 6

1. Să se calculeze a^2+b^2, ştiind că numerele a şi b au suma egală cu 4 şi produsul egal cu 3.

2. Fie funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ şi $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

3. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului x, ştiind că $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ şi $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\cdots,\sqrt{10}\right\}$, acesta să fie raţional.

5. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele $2x-y+3=0$ şi $ax+2y+5=0$ sunt paralele.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=1$, $AC=2$ şi $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.